Teoretická část - 22.2.2021

1. (a) Definujte konkávní, ryze konkávní, rostoucí a klesající funkci (2 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o vztahu druhé derivace a konvexity/konkávity $(2,5$ bodu).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. existuje funkce f konkávní na $\mathbb{R}$, která je rostoucí na $[0,1]$ a $[5,13]$ a klesající na $[2,4]$,

      ii. existuje funkce f konkávní na $\mathbb{R}$, která je rostoucí na $\mathbb{R}$,

      iii. existuje funkce f konkávní na $\mathbb{R}$, která není spojitá na $\mathbb{R}$,

      iv. existuje lichá funkce f ryze konkávní na $\mathbb{R}$,

      v. existují funkce f a g konkávní na $\mathbb{R}$ takové, že $f+g$ není konkávní na $\mathbb{R}$,

      vi. existují funkce f a g konkávní na $\mathbb{R}$ takové, že $f \cdot g$ není konkávní na $\mathbb{R}$,

      Vše řádně zdůvodněte $(3,5$ bodu).

2. (a) Definujte číselnou posloupnost, limitu posloupnosti a vybranou posloupnost (3 body).
   (b) Zformulujte a dokažte Bolzano-Weierstrassovu větu ($2,5$ bodu).
   (c) Dokažte, že existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ s následujícími vlastnostmi:
      i. existuje $L \in \mathbb{R}$, že každá vybraná posloupnost z $\{a_n\}$ má limitu L,
      ii. $\{b_n\}$ nemá limitu a existují $L, M \in \mathbb{R}$, $L \neq M$, takové, že pokud má vybraná posloupnost z $\{b_n\}$ limitu K, potom $K \in \{L, M\}$.

      Vše řádně zdůvodněte (1 bod).
   (d) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že pro každé $L \in (0, \infty)$ existuje vybraná posloupnost z $\{a_n\}$ mající limitu L. Dokažte, že existuje vybraná posloupnost z $\{a_n\}$ mající limitu 0 ($1,5$ bodu).

3. (a) Definujte okolí a prstencové okolí (včetně okolí nevlastních bodů) a limitu funkce (včetně nevlastních limit a limit v nevlastních bodech) (2 body).

   (b) Zformulujte l'Hospitalovo pravidlo (1 bod).

   (c) Zformulujte větu o derivaci jako limitě derivací (1 bod).

   (d) Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mající vlastní derivaci na $\mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. je-li $f'(0) = 1$, potom $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$

      ii. je-li $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$, potom $f'(0) = 1$

      iii. je-li $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, potom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$,

      iv. je-li $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, potom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,

      Vše řádně zdůvodněte (4 body).